ECOLE NATIONALE DU GENIE DE L'EAU ET DE L'ENVIRONNEMENT DE STRASBOURG

CONCOURS D'ENTREE 1996

PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

OPTION BIOLOGIE-MATHEMATIQUES

DUREE : 3 heures.

N.B. : Ce sujet comporte 3 pages de texte.

I

Pour n entier positif ou nul, on note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f_n(x) = e^{-x}\frac{x^n}{n!}$ et on pose pour $A \geq 0$, $u_n(A) = \int_A^{+\infty} f_n(x)dx$

$v_n = u_n(n)$.

1. Montrer que l'intégrale définissant $u_n(A)$ est convergente. Trouver une relation entre $u_{n+1}(A)$ et $u_n(A)$. En déduire l'expression de $u_n(A)$ sous forme de somme.

2. Exprimer $v_{n+1} - v_n$ au moyen de $f_n(n+1)$ et $\int_n^{n+1} f_n(x)dx$.

   Etudier les variations de la fonction f_n et en déduire que la suite (v_n) est décroissante.

3. Montrer que la suite (v_n) converge vers un nombre L positif ou nul.

4. Etudier les variations, puis le signe, de la fonction : $t \longmapsto t\,e^{2-2t} + t - 2$ pour $t \in [0,1]$.
   En déduire que : $\forall\, x \in [0,n]\quad f_n(x) \leq f_n(2n-x)$.

5. On pose $w_n = \int_0^n f_n(x)dx$. Montrer que : $w_n \leq \int_n^{2n} f_n(x)dx \leq v_n$.

6. Calculer $v_n + w_n$; en déduire que : $v_n \geq \frac{1}{2}$. Que peut-on en déduire pour le nombre L ?

II

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la loi de Poisson de paramètre 1. On pose $Y_n = X_1 + \ldots + X_n$.

1. Calculer l'espérance et la variance de Y_n. Donner la loi de Y_n.

   Déterminer les réels a et b, avec $a > 0$, tels que la variable aléatoire $Y_n^* = aY_n + b$ ait une espérance nulle et une variance égale à 1.

2. Appliquer le théorème de la limite centrée pour calculer : $\lim_{n\to+\infty} Pr(Y_n^* \leq 0)$.
   En déduire la valeur du nombre L (défini au I).

3. Exprimer $\lim_{n\to+\infty} Pr(x < Y_n^* \leq y)$ (pour x, y réels fixés) en utilisant la fonction de répartition, notée Π, de la loi normale centrée réduite.

4. En s'inspirant du 3., donner une valeur approchée de $Pr\left(90 < Y_{100} \leq 120\right)$.

   On donne les valeurs approchées :
   $\Pi(1) = 0{,}84$
   $\Pi(2) = 0{,}98$.

III

Soit $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la même loi de densité $g(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ (α paramètre, $\alpha > 0$).

On pose $W_n = Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_n$.

1. Calculer l'espérance et la variance de Z_n, puis de W_n.
   Déterminer une fonction de densité de W_2, puis par récurrence de W_n.
   Donner l'expression de la fonction de répartition de W_n au moyen de $u_{n-1}(A)$ (A bien choisi, $n \geq 1$).

2. En utilisant les parties **I** et **II**, montrer que : $\Pr\left(W_{n+1} \geq \frac{n}{\alpha}\right) = \Pr(Y_n \leq n)$.

3. Soit $t > 0$ fixé, et $N(t)$ la variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, égale au nombre d'indices $k \geq 1$ tels que $W_k \leq t$.

   a. Démontrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'événement $\left(N(t) = n\right)$ est égal à l'événement $\left(\left(W_n \leq t\right) \cap \left(W_{n+1} > t\right)\right)$.

   Comment peut-on écrire l'événement $\left(N(t) = 0\right)$?

   b. Trouver la loi de la variable aléatoire $N(t)$, son espérance et sa variance.

4. a. Déterminer une fonction de densité de la variable aléatoire $\frac{Z_2}{Z_1}$ et son espérance.

   b. Déterminer une fonction de densité de la variable aléatoire $\frac{W_2}{W_1}$, puis de $\frac{W_{n+1}}{W_n}$.